Probeklausur 2 • 12.2

für Montag, 29. April 2019 • 2 Unterrichtsstunden

GK

Geraden • Ebenen • Lagebeziehungen

- ***Ergebnis-Ausdrücke*** *sollen grundsätzlich in eine angemessene Grundform gebracht, also auch* elementar *vereinfacht werden.*
- ***Taschenrechner*** *und* ***Formelsammlung*** *sowie ein eigenes „**Formelblatt**" dürfen nur im zweiten Teil benutzt werden.*
- *Achten Sie auf korrekte* ***Notation*** *und Schreibweise.*

Aufwendige Umformungen sind aber nicht gefordert.

Teil 1 ohne Hilfsmittel

30 Minuten

Aufgabe 1. Ermitteln Sie a) eine Koordinatengleichung für die Ebene E durch die Punkte

25 Punkte

$$A(2|-1|0), B(3|0|1), C(3|-1|-2)$$

sowie b) eine Gleichung für die Gerade g durch die Punkte

$$P(4|1|5) \text{ und } Q(6|2|4).$$

Bestimmen Sie c) die Lage von g relativ zur Ebene E. – Nennen Sie d) (irgendwelche aber verschiedene) neue Punkte R, S und T mit den Eigenschaften:

- R liegt auf E
- S liegt auf g
- T liegt weder auf E noch auf g

Geben Sie e) die Normalengleichung einer Ebene F an, die parallel zu E liegt und den Punkt P enthält.

Aufgabe 2. Nennen Sie eine geometrische Eigenschaft des Vektorprodukts $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$, wenn $\vec{u}$ und $\vec{v}$ nicht Vielfache voneinander sind und berechnen Sie das Vektorprodukt von $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ (aus Aufgabe 1) mit sich selbst.

5 Punkte

Teil 2 mit Hilfsmitteln

60 Minuten

Aufgabe 3.

60 Punkte

nach B1 Landesabitur 2017

In einem dreidimensionalen Koordinatensystem beschreibt die xy-Ebene eine flache Landschaft. Eine Einheit entspricht dabei einem Kilometer. Ein Sportflugzeug befindet sich im Punkt $P(?9|25|2)$ und fliegt geradlinig in Richtung des Punktes $Q(?1|9|2)$ auf eine Nebelwand zu. Für die Strecke $\overline{PQ}$ benötigt es genau sechs Minuten. Die dem Flugzeug zugewandte Begrenzungsebene E der Nebelwand enthält die Punkte $A(1|3|1)$, $B(5|2|0)$ und $C(3|0|3)$.

a) Begründen Sie, dass nebenstehende Gleichung eine Parametergleichung der Geraden g ist, in der die Flugroute liegt. – Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit des Flugzeuges auf dem Weg von P nach Q in km/h.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 25 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Bestimmen Sie für die Ebene E eine Gleichung in Koordinatenform.

Zur Kontrolle: Eine mögliche Koordinatengleichung von E ist $x + 2y + 2z = 9$.

GK

c) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S, in dem das Flugzeug bei gleichbleibender Flugrichtung die dem Flugzeug zugewandte Begrenzungsebene der Nebelwand durchstoßen würde.

Zur Kontrolle: $S(3|1|2)$

d) Aufgrund des Nebels ändert der Pilot rechtzeitig seine Flugroute und fliegt in gleichbleibender Höhe parallel zur Ebene E weiter. – Erläutern Sie, warum nebenstehder Vektor $\vec{u}$ ein möglicher Richtungsvektor der Geraden ist, die die neue Flugroute enthält.

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) Erläutern Sie die Zeilen (I) bis (V) in diesem Sachzusammenhang.

(I) $S(3|1|2),\ T(-9+t|25-2t|2)$

(II) $d = \sqrt{(-9+t-3)^2 + (25-2t-1)^2 + (2-2)^2}$
$= \sqrt{5t2 - 120t + 720}$

(III) $\sqrt{5t^2 - 120t + 720} = 5(\text{km})$
also ist $t_1 = 12 + \sqrt{5} \approx 14{,}2$ und $t_2 = 12 - \sqrt{5} \approx 9{,}8$

(IV) $t_2 < t_1$, also ist t_2 die gesuchte Lösung

(V) Ergebnis: $T_2(3-\sqrt{5}|1+2\sqrt{5}|2)$

90 Punkte insgesamt

Lösungen Probeklausur 2 • 12.2

für Montag, 29. April 2019 • 2 Unterrichtsstunden

Geraden • Ebenen • Lagebeziehungen

Teil 1 ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1. a) Für den Normalenvektor von E berechnen wir

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} =: \vec{n}$$

sowie $d = \vec{n} \bullet \vec{a} = 7$, was für B und C stimmt (nicht gefragte Probe). Also ist

$$E: 2x - 3y + z = 7.$$

b) Für die Geradengleichung durch $P(4|1|5)$ und $Q(6|2|4)$ ergibt sich mit $\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p}$ zu

$$g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}4\\1\\5\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

c) Lagebeziehung von g und E: Der Richtungsvektor von g ist senkrecht zum Noralenvektor $\vec{n}$ von E ist, denn $\vec{n} \bullet \overrightarrow{PQ} = 0$. Liegt der Aufpunkt P von g in E? Punktprobe ergibt $\vec{n} \bullet \vec{p} = 10 \neq 7$, also nein. Damit verläuft die Gerade g echt parallel zu E.

d)

- R muss die Ebenegleichung von E erfüllen, zum Beispiel $R(0|0|7)$.
- S auf g für irgendein r (außer 0 und 1, die P und Q ergeben): für $r = -1$ zum Beispiel ergibt sich $S(2|0|6)$.
- T darf keine der Gleichungen erfüllen, zum Beispiel $T(0|0|0)$: in g müsste in der ersten komponente $r = -2$ sein, was in der zweiten schon nicht stimmt.

e) Normalengleichung einer Ebene F, die parallel zu E liegt und den Punkt P enthält: selber Normalenvektor, nur $d_f = \vec{n} \bullet \vec{p} = 10$ (oben schon berechnet), also

$$F: \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} \bullet \vec{x} = 10.$$

Aufgabe 2. Das Vektorprodukt $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$ steht senkrecht auf $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Immer, wenn $\vec{v}$ Vielfaches von $\vec{u}$ ist, ergibt das Vektorprodukt den Nullvektor.

Teil 2 mit Hilfsmitteln

Aufgabe 3. a)

In der Gleichung der Flugroutengeraden durch P und Q lässt sich als Aufpunkt P wählen und als Richtungsvektor

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p} = \begin{pmatrix}8\\-16\\0\end{pmatrix} = 8 \cdot \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}.$$

Füt die mittlere Geschwindigkeit des Flugzeuges auf dem Weg von P nach Q ermitteln wir die Strecke $\overline{PQ} = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = 8\cdot\sqrt{1+4+0} = 8\cdot\sqrt{5} \doteq 17{,}89$ (km). Die (mittlere) Geschwindigkeit auf dem Weg von P nach Q ist dann

$$\frac{17{,}89\,\text{km}}{6\,\text{min}} = \frac{17{,}89\,\text{km}}{0{,}1\,\text{h}} = 178{,}9\,\text{km/h}.$$

b) Für eine Koordinatengleichung der Ebene E berechnen wir wieder den Normalenvektor

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ -10 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} =: \vec{n}$$

und damit $d = \vec{n} \bullet \vec{a} = 9$ (was auch für B und C stimmt – Probe). Also ist

$$E: x + 2y + 2z = 9$$

eine Koordinatengleichung für E.

c) Gesucht ist der Schnittpunkt S von Flugbahn g und Nebelwand E. Wir setzen den Geradenterm von g in E ein und berechnen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \left[\begin{pmatrix} -9 \\ 25 \\ 2 \end{pmatrix} + r\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 9$$

durch Ausmultiplizieren („Hand geben“) zu $45 + r\cdot(-3) = 9$, also $r = {}^{36}\!/_{3} = 12$. Einsetzen von r in den g-Term ergibt den gesuchten Schnittpunkt $S = (3|1|2)$.

d) Die gleichbleibende Höhe wird durch die Null in der z-Komponente des Vektors $\vec{u}$ sichergestellt. Und dieser Vektor ist tatsächlich parallel zur Ebene E, da $\vec{u} \bullet \vec{n} = 2 - 2 + 0 = 0$ ist.

e) In (I) wird nochmal der zuvor berechnete Durchstoßsungspunkt S genannt und daneben ein allgemeiner Punkt T auf der ursprünglichen Flugbahn (mit Parameter t). – Zeile (II) berechnet den Abstand des Punktes T von S (in Abhängigkeit von t), wie weit also das Flugzeug auf seiner Bahn von der Nebenwand entfernt ist. – Zeile (III) berechnet den Parameter t, für den dieser Abstand gerade 5 km beträgt. Dabei gibt es zwei Lösungen. – Zeile (IV) wählt die kleinere der beiden Lösungen aus, also den Parameter, der einen Punkt auf der Geraden beschreibt, der näher am Ausgangspunkt, also *vor* der Nebelwand liegt. Der Punkt zum zweiten Parameter liegt 5 km *hinter* der Wand. – In Zeile (V) wird der zugehörige Punkt angegeben (welcher durch Einsetzen von t_2 berechnet wurde), der Punkt also, an dem das Flugzeug 5 km vor der Wand ist. Dies könnte zum Beispiel der Punkt sein, an dem der Pilot die Flugrichtung vor der Nebelwand ändert.